

(MAT5SA)

(3110-5 A)

B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCTOBER/NOVEMBER 2017.

Third Year – Fifth Semester

Part II – Mathematics

Paper V – RING THEORY AND VECTOR CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. Prove that Every finite integral domine is a field.
ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము ఒక క్షేత్రము అని నిరూపించండి.
2. Show that the intersection of two ideals of a ring R is an ideal of R .
 R వలయం రెండు ఐడియల్స్ యొక్క ఛేదనము అనునది R నకు ఒక ఐడియల్ అని చూపండి.
3. If f is a homomorphism of a ring R into a ring R' , then show that $\ker f$ is an ideal of R .
వలయం R నుండి R' నకు f ఒక వలయ సమరూపత అయిన $\ker f$ అనునది R నకు ఒక ఐడియల్ అని చూపండి.
4. Show that the subset $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ is a left ideal but not right ideal of the ring of 2×2 matrices over integers.
పూర్ణాంకాలపై నిర్వచితమైన 2×2 మాత్రిక వలయం $M_2(\mathbb{Z})$ కి $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ ఒక ఎడమ ఆదర్శమే కాని కుడి ఆదర్శం కాదు అని చూపండి.
5. Show that $\text{curl } f = \vec{0}$, where $\vec{f} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + yk$.
 $\vec{f} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + yk$ అయితే $\text{curl } f = \vec{0}$ అని చూపుము.
6. Find the directional derivative of the function $xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent to the curve $x=t, y=t^2, z=t^3$ at the point $(1, 1, 1)$.
 $xy^2 + yz^2 + zx^2$ అను ప్రమేయానికి $(1, 1, 1)$ బిందువు వద్ద వక్రానికి గల స్పర్శరేఖ దిశలో $x=t, y=t^2, z=t^3$ యొక్క దిశాత్మక ఉత్పన్నం కనుక్కోండి.
7. Prove that $(f \times \nabla) \times r = -2f$.
 $(f \times \nabla) \times r = -2f$ అని చూపండి.

8. Evaluate $\int_C f d\vec{r}$, where $f = x^2 y^2 \vec{i} + y \vec{j}$ and the curve $y^2 = 4x$ in the xy -plane from $(0, 0)$ to $(4, 4)$.

వక్రము $y^2 = 4x$, xy -తలముపై (0, 0) నుండి (4, 4) వరకు ఉంటుంది. మరియు $f = x^2 y^2 \vec{i} + y \vec{j}$ అయితే $\int_C f d\vec{r}$ ను సాధించండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL of the following questions.

9. (a) (i) Prove that A Field has no zero divisors.
క్షేత్రానికి శూన్యభాజకాలు ఉండవు అని నిరూపించండి.
(ii) Prove that the characteristic of an integral domine is either a prime or zero.
పూర్ణాంక ప్రదేశము యొక్క లాక్షణికము ఒక ప్రధాన సంఖ్య లేదా సున్న అని చూపండి.

Or

- (b) Define skew field. Is Every skew field is a field, give an example and justify your answer.
భాజక క్షేత్రాన్ని నిర్వచించండి. ప్రతి భాజకక్షేత్రము ఒక క్షేత్రమా? ఉదాహరించండి. మీ సమాధానాన్ని సరిచూడండి.

10. (a) State and prove fundamental theorem of homomorphisms of rings.

వలయాల సమరూపతా ప్రాథమిక సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

- (b) An ideal $U \neq R$ of a commutative ring R , is a prime ideal if and only if R/U is an integral domine.

వలయం R లో U అనే ఆదర్శం ప్రధాన ఆదర్శం కావడానికి, వ్యుత్పన్న వలయం R/U ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం కావడం అవశ్యక పర్యాప్త నియమము అని నిరూపించండి.

11. (a) If $F = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ evaluate $\oint_C F \cdot d\vec{r}$ where the curve 'C' is the rectangle in the xy -plane bounded by $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$.

xy -తలం నందు $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$ లతో పరిబద్ధమైన C వక్రము దీర్ఘచతురస్రం నకు $\oint_C F \cdot d\vec{r}$ కనుక్కోండి. ఇచ్చట సదిశ $F = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$.

Or

- (b) If $\vec{a}$ is constant vector, prove that $\text{curl } \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{-\vec{a}}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{a} \cdot \vec{r})$.

$\vec{a}$ అనునది ఒక స్థిర సదిశ అయిన $\text{curl } \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{-\vec{a}}{r^3} + \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{a} \cdot \vec{r})$ అని చూపండి.

12. (a) Prove that $\text{grad}(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times \text{curl}A + A \times \text{curl}B$.
 $\text{grad}(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times \text{curl}A + A \times \text{curl}B$ అని చూపండి.

Or

- (b) Prove that $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$.
 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ అని చూపండి.

13. (a) State and prove Stokes theorem.

స్టోక్స్ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

- (b) Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ where C is the region bounded by $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$.

$y = \sqrt{x}$ మరియు $y = x^2$ లతో పరిబద్ధమైన ప్రదేశము C అయితే $\oint_C (3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ కు గ్రీన్స్ సిద్ధాంతం సరిచూడుము.